ЗАДАЧА №4.7

Гаврилова Дарья
Группа 301

УСЛОВИЯ:

Для излучения атома используется модель в виде цуга затухающих

колебаний, задаваемого функцией:

$$\xi(t) = \begin{cases} a * \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) * \sin(\Omega t)\ , & t > 0 \\ 0\ , & t \leq 0 \end{cases}$$

где τΩ >> 1. Здесь Ω – частота излучения, τ – радиационное время жизни атома. Найти спектр излучения атома S(ω). Получить лоренцову форму линии излучения S(ω) атома в окрестности частоты излучения Ω, используя условие τΩ >> 1 и полагая, что ω-Ω << ω, Ω. Построить графики излучения ξ(t) и его спектра S(ω) при τΩ = 3, 10, 100. Рассмотреть характер изменения спектра при τ → ∞ . Оценить радиационное уширение спектра излучения He-Ne лазера, если радиационное время жизни атома $\tau = 10^{-8}$ c.

$\Xi(t)$

$a = 3 \; \Omega = 3 \; \tau = 1$

СПЕКТР

$$S(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) \exp(-i\omega t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} a \exp\left(-\frac{t}{\tau} - i\omega t\right) \sin(\Omega t)\, dt$$

$$= -\frac{a}{2\pi\Omega} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau} - i\omega t\right) d\cos(\Omega \mathrm{t})$$

$$= \frac{a}{2\pi\Omega} + \frac{a}{2\pi\Omega} (\frac{1}{\tau} + i\omega) \int^{+\infty} a \exp\left(-\frac{t}{\tau} - i\omega t\right) \cos(\Omega t)\, dt$$

$$= \frac{a}{2\pi\Omega} + (\frac{1}{\tau} + i\omega) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau} - i\omega t\right) d\sin(\Omega \mathrm{t})$$

$$= \frac{a}{2\pi\Omega} + \frac{a}{2\pi\Omega^2} \left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)^2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau} - i\omega t\right) \sin(\Omega t)\, dt$$

СПЕКТР

Пусть $S(\omega) = I$, тогда:

$$I = \frac{a}{2\pi\Omega} - \frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)^2 I$$

Отсюда

$$I = \frac{a}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega^2 + \left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)^2}$$

$$S(\omega) = \frac{a}{2\pi}\frac{\Omega\tau^2}{\Omega^2\tau^2 + (1 + i\omega\tau)^2}$$

$S(\omega = \Omega)$

$$S(\omega) = \frac{a}{2\pi}\frac{\Omega\tau^2}{\Omega^2\tau^2 + (1 + i\Omega\tau)^2}$$ – лоренцева кривая

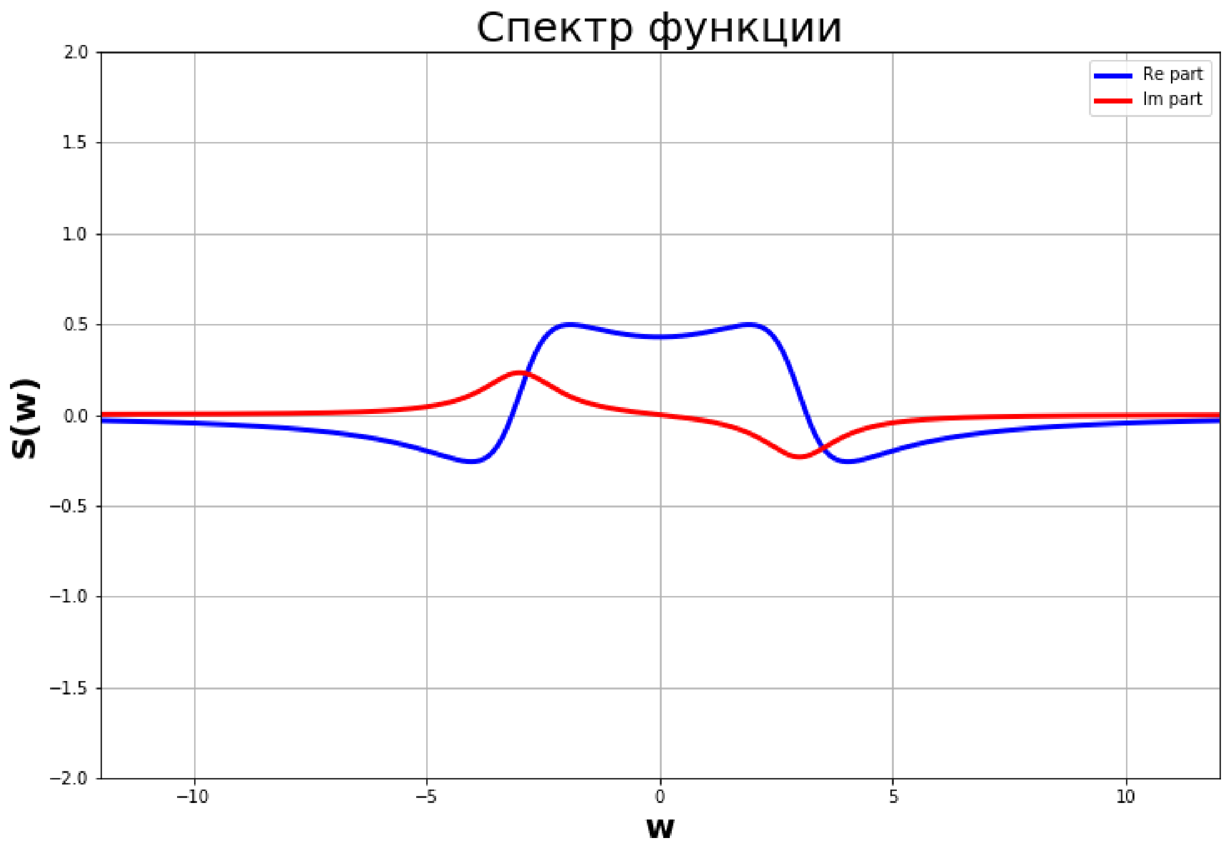
При $\omega = \Omega$ на графиках Re{S} и Im{S} будет максимум

$$S(\omega) = \frac{a}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega^2+\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)^2} \rightarrow \frac{a}{2\pi}\frac{\Omega}{\Omega^2-\omega^2} = \frac{a}{2\pi}\frac{\Omega}{(\Omega-\omega)(\Omega+\omega)}$$

$$\{\Omega - \omega \ll \Omega\} = \frac{a}{2\pi}\frac{1}{(\Omega+\omega)}, \text{ при } t \rightarrow \infty$$

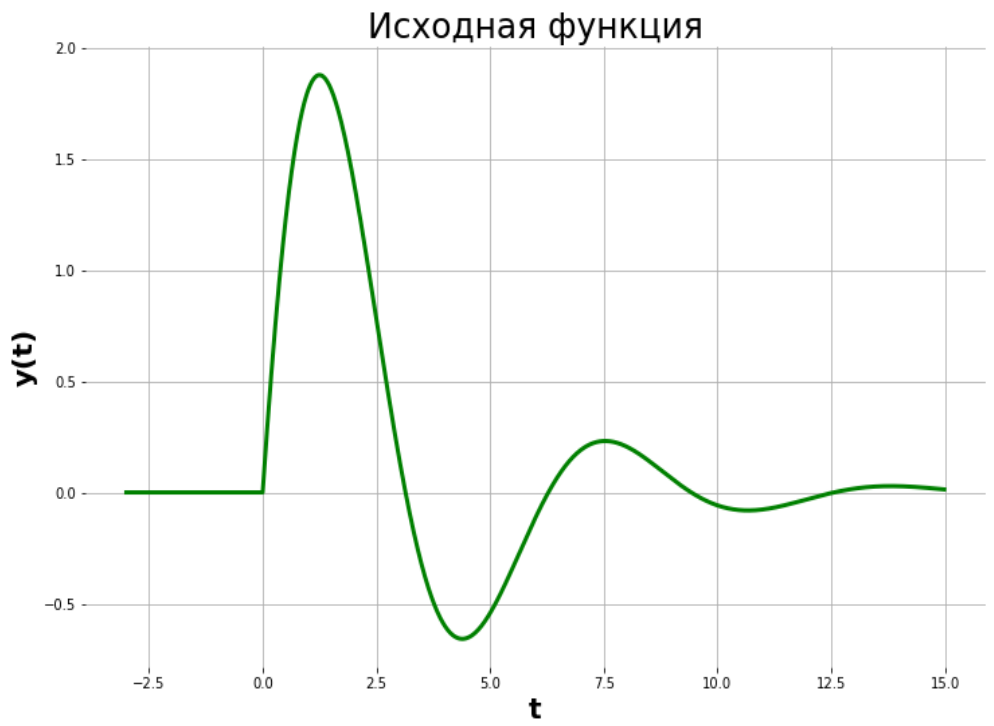
ГРАФИКИ: $\Omega\tau = 3$

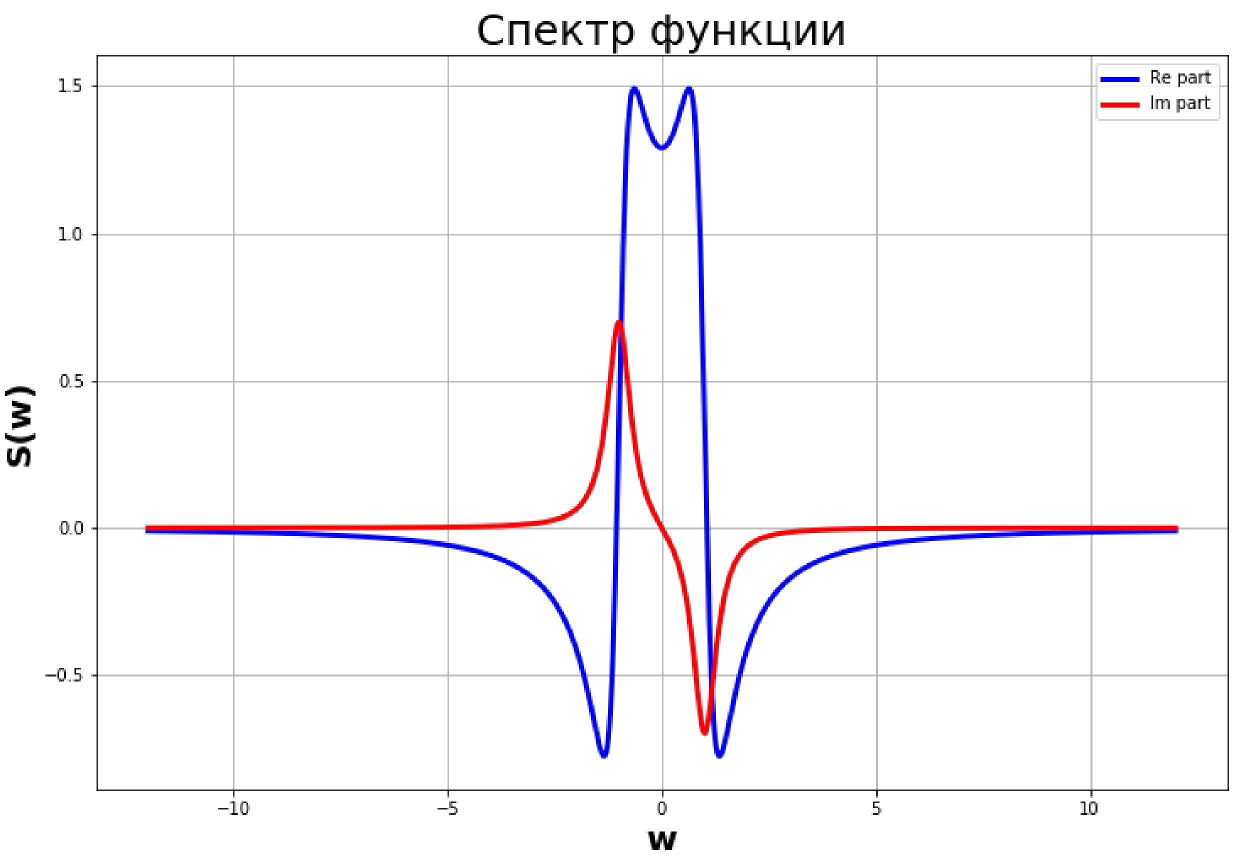
$a = 3 \quad \Omega = 3 \quad \tau = 1$



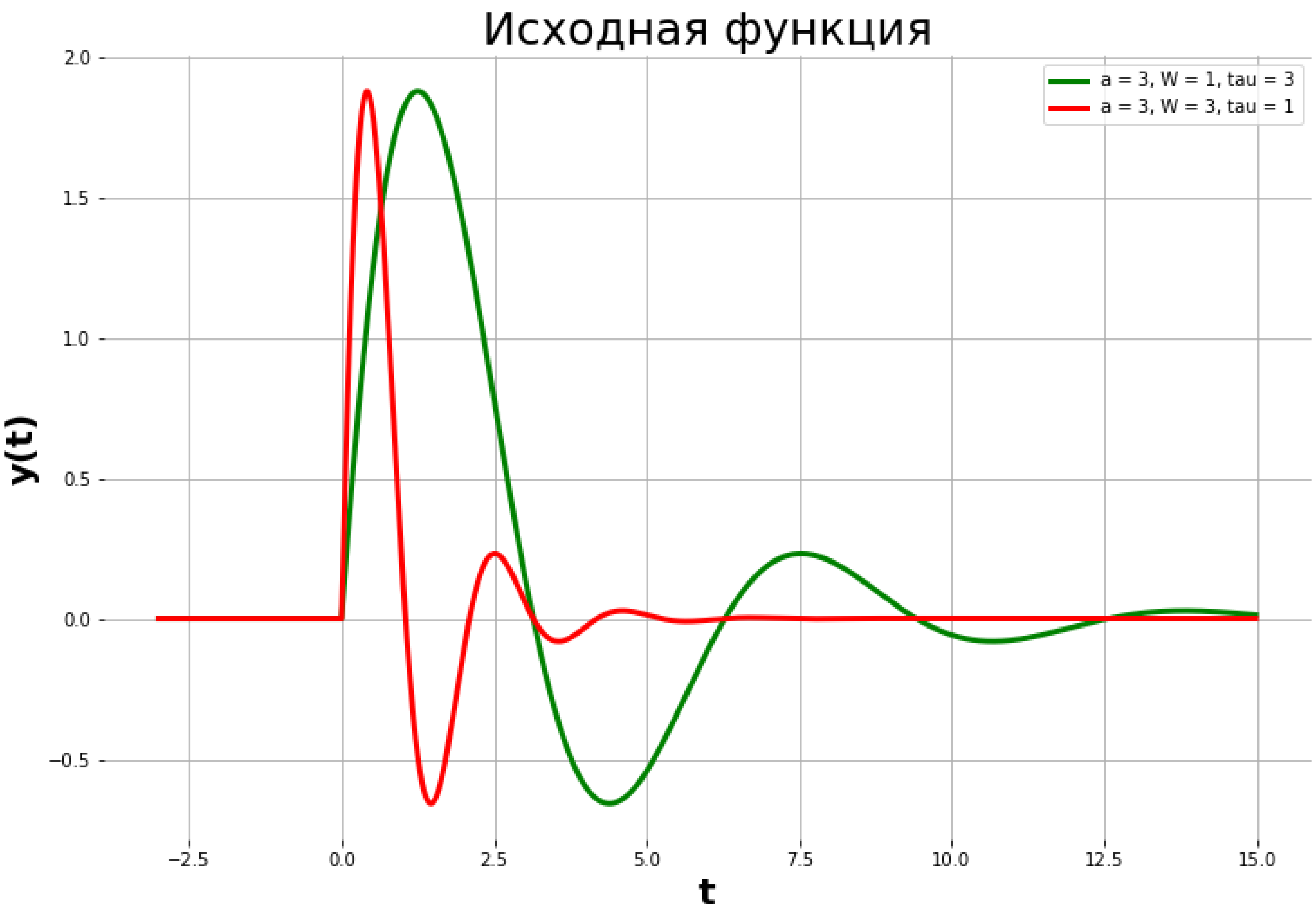
ГРАФИКИ: $\Omega\tau = 3$

a = 3 Ω = 1 τ = 3

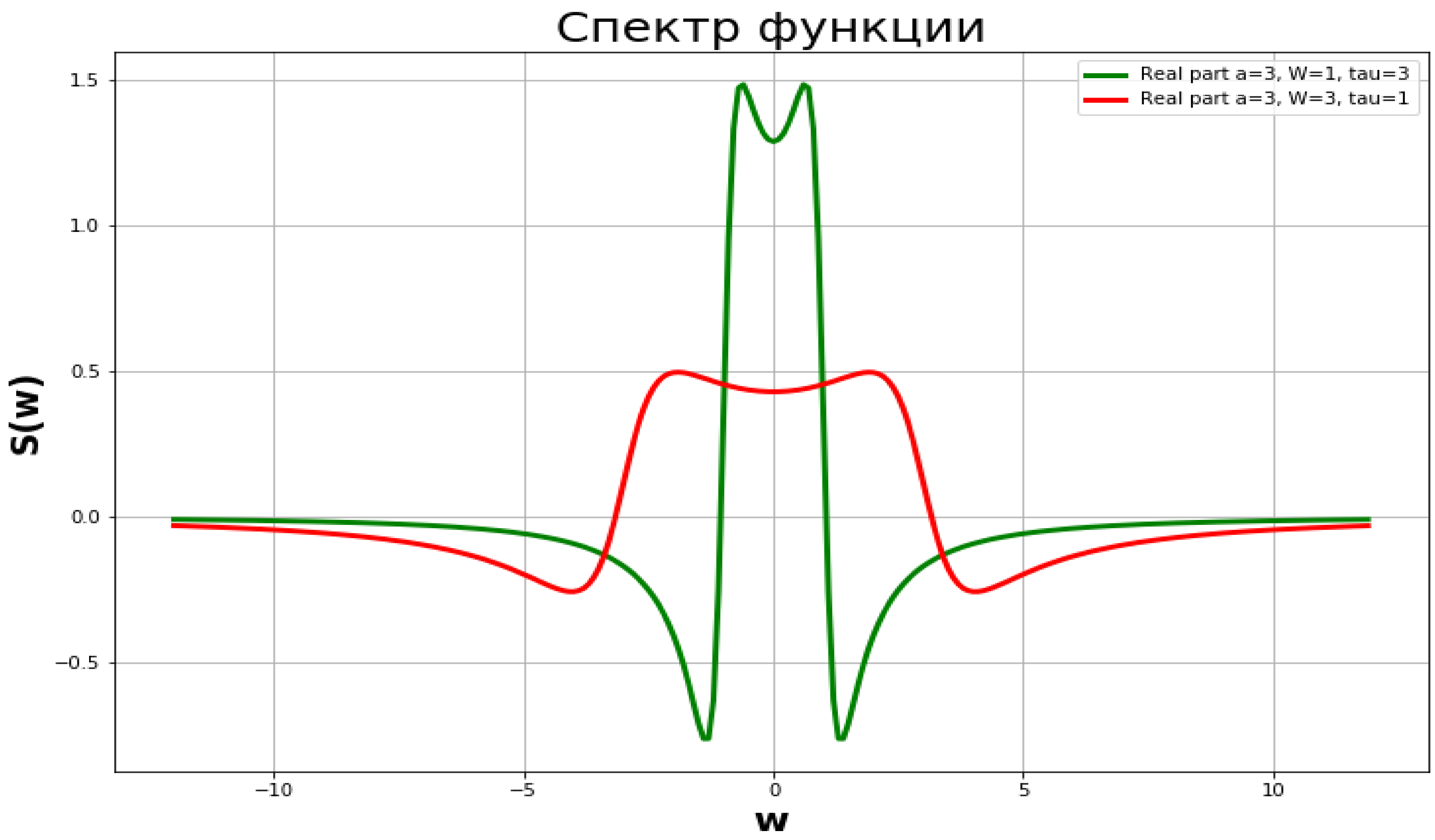




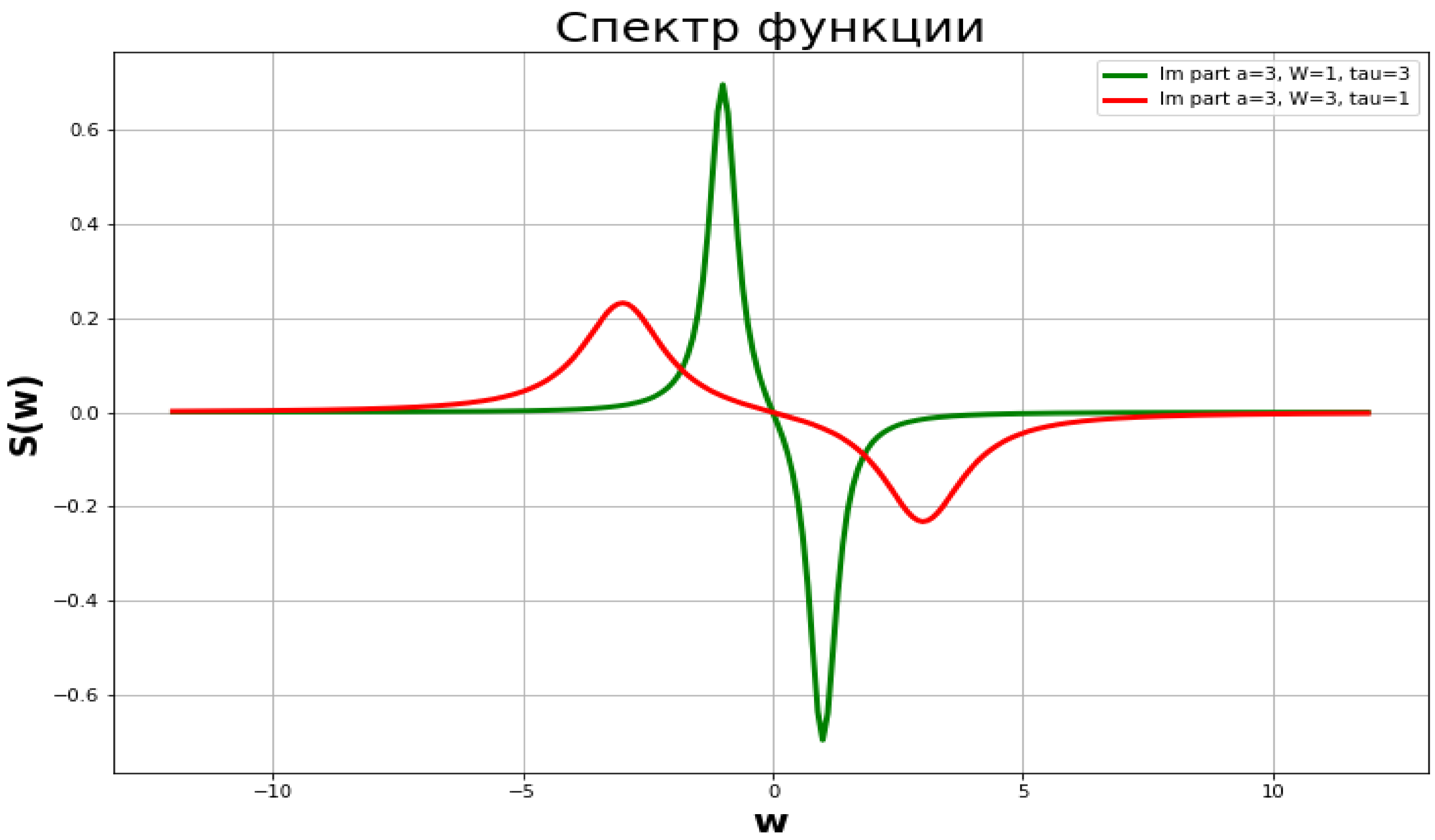
СРАВНИМ



Исходная функция
a = 3, W = 1, tau = 3
a = 3, W = 3, tau = 1
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
y(t)
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
t



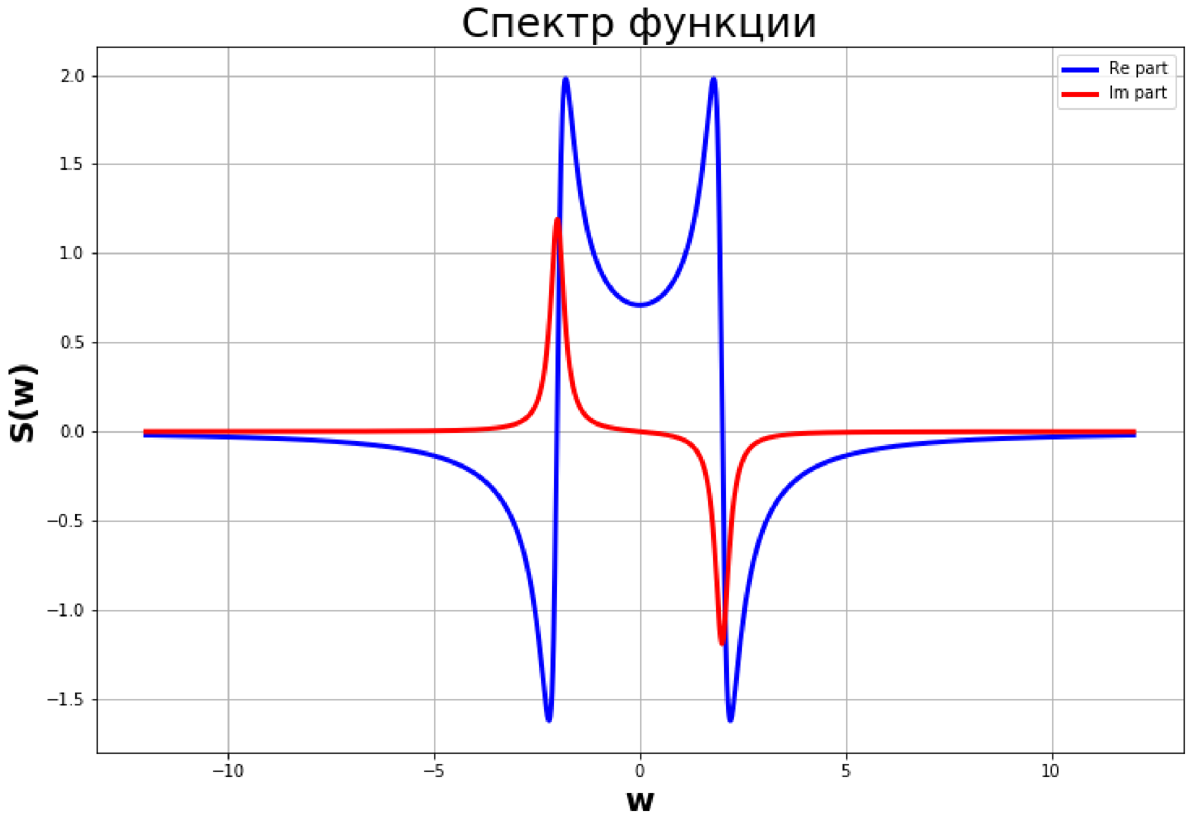
Спектр функции
Real part a=3, W=1, tau=3
Real part a=3, W=3, tau=1
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
S(w)
−10
−5
0
5
10
w



Спектр функции
Im part a=3, W=1, tau=3
Im part a=3, W=3, tau=1
S(w)
w
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−10
−5
0
5
10

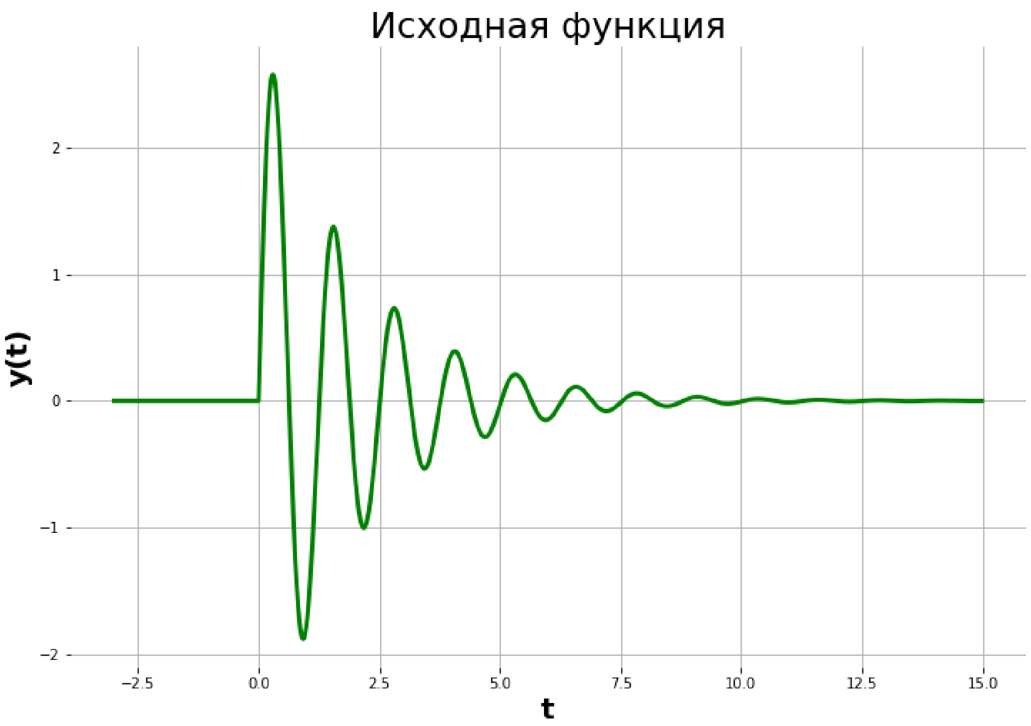
ГРАФИКИ: $\Omega\tau = 10$

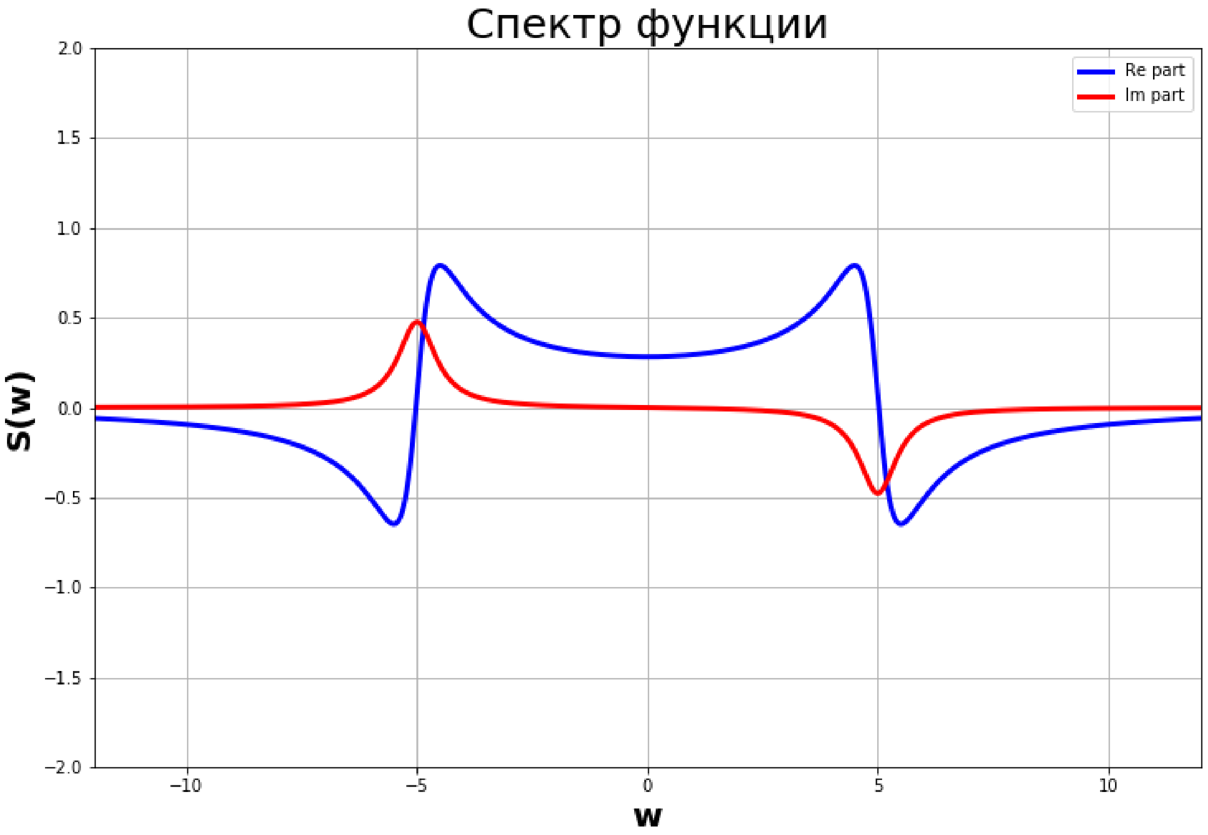
$a = 3$ $\Omega = 2$ $\tau = 5$



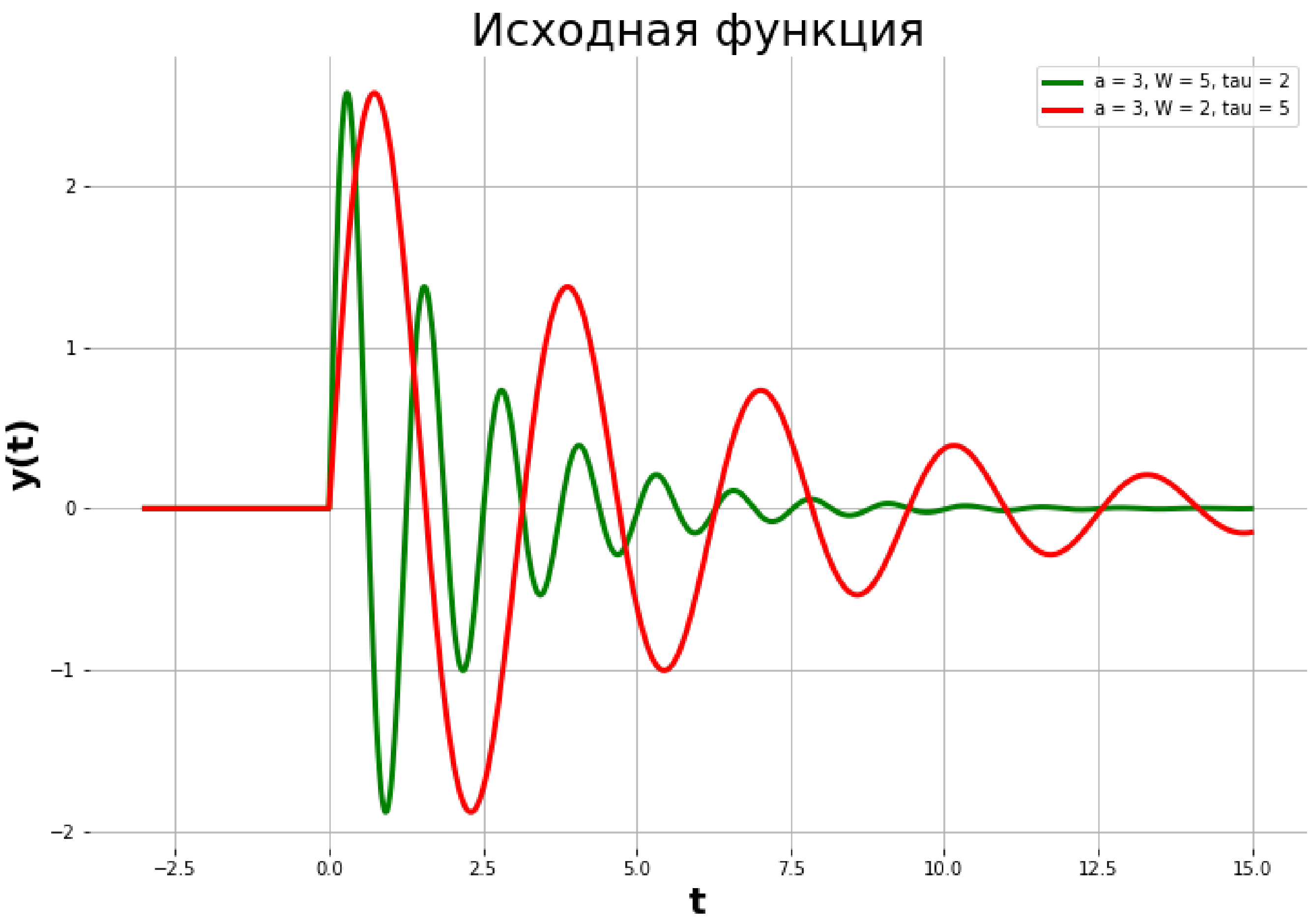
ГРАФИКИ: ΩT= 10

a = 3 Ω = 5 τ = 2

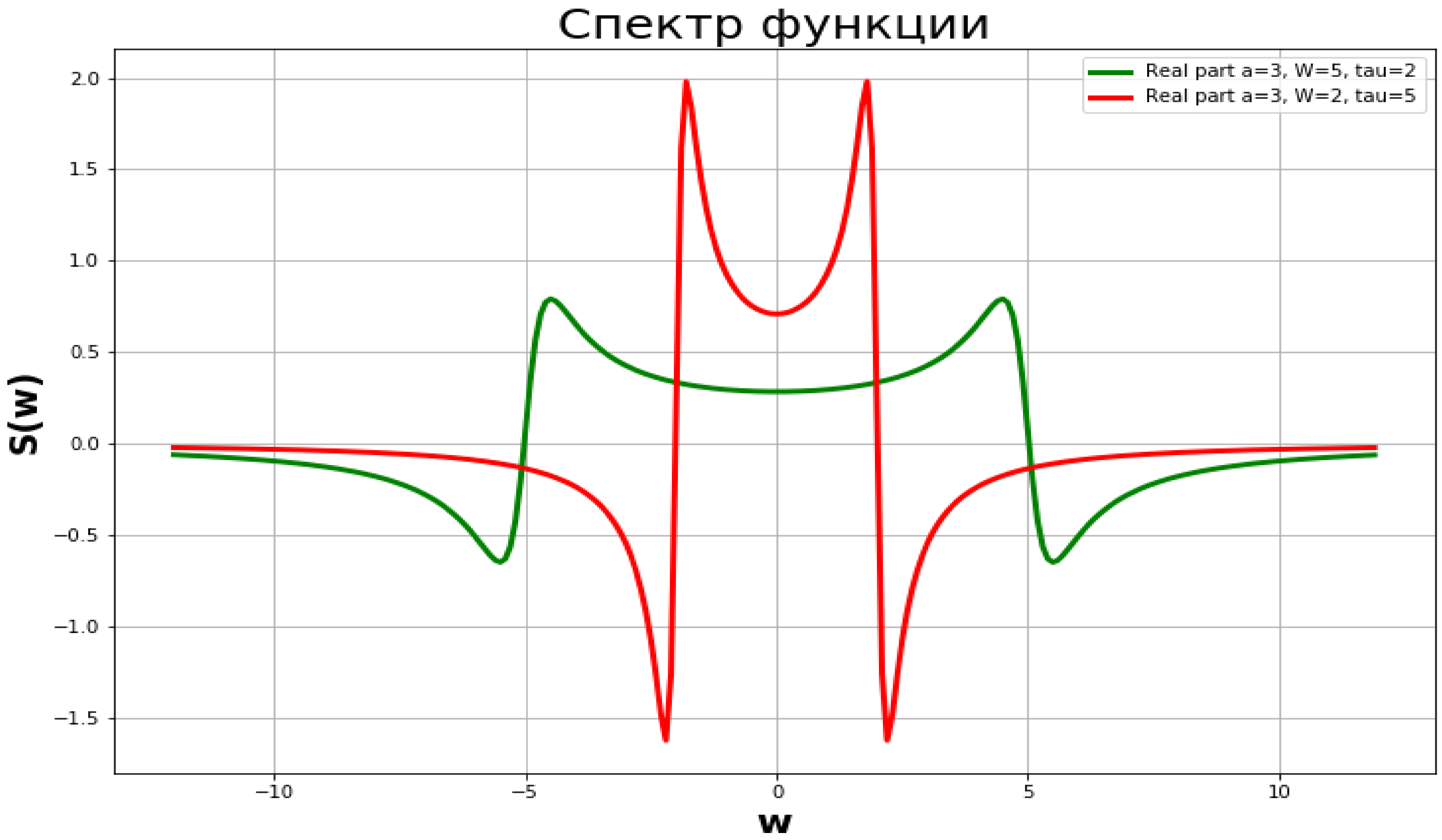




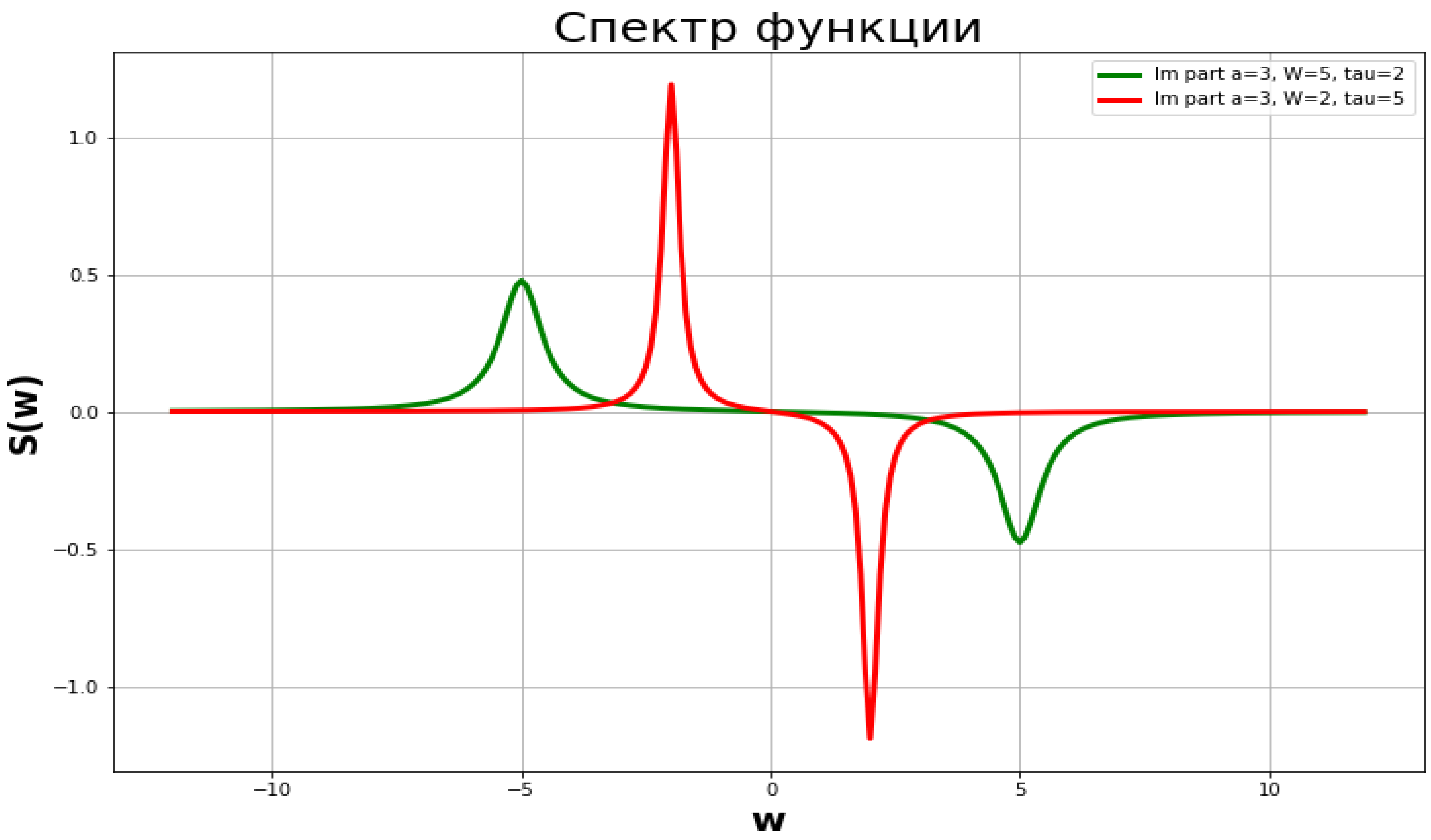
СРАВНИМ



Исходная функция
a = 3, W = 5, tau = 2
a = 3, W = 2, tau = 5
y(t)
t
2
1
0
−1
−2
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0



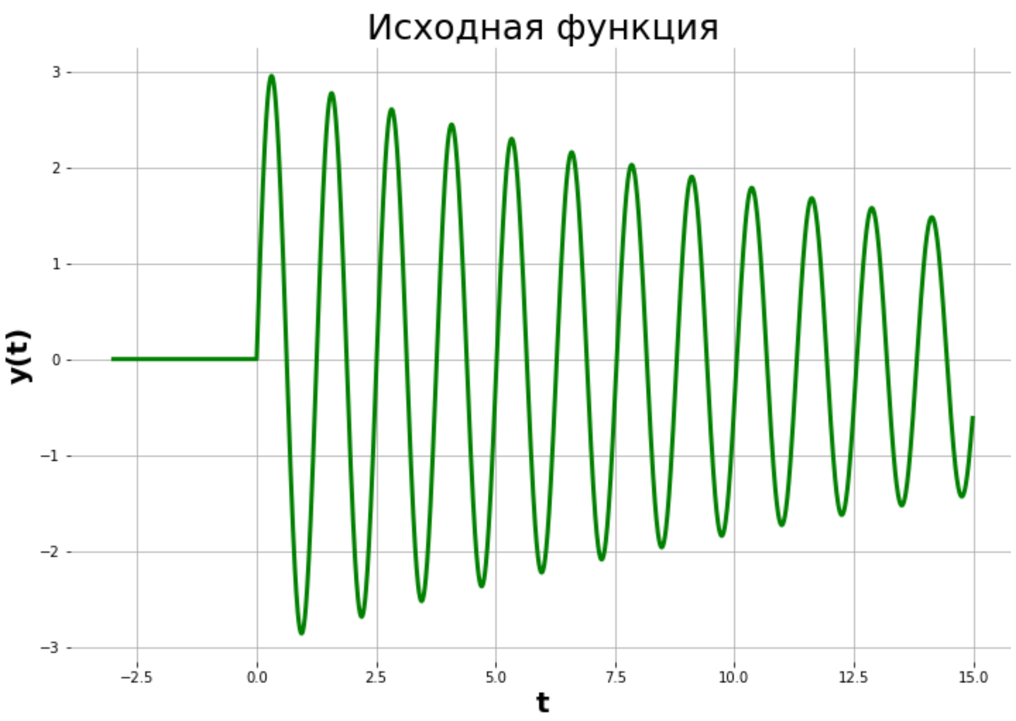
Спектр функции
Real part a=3, W=5, tau=2
Real part a=3, W=2, tau=5
S(w)
w
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−10
−5
0
5
10

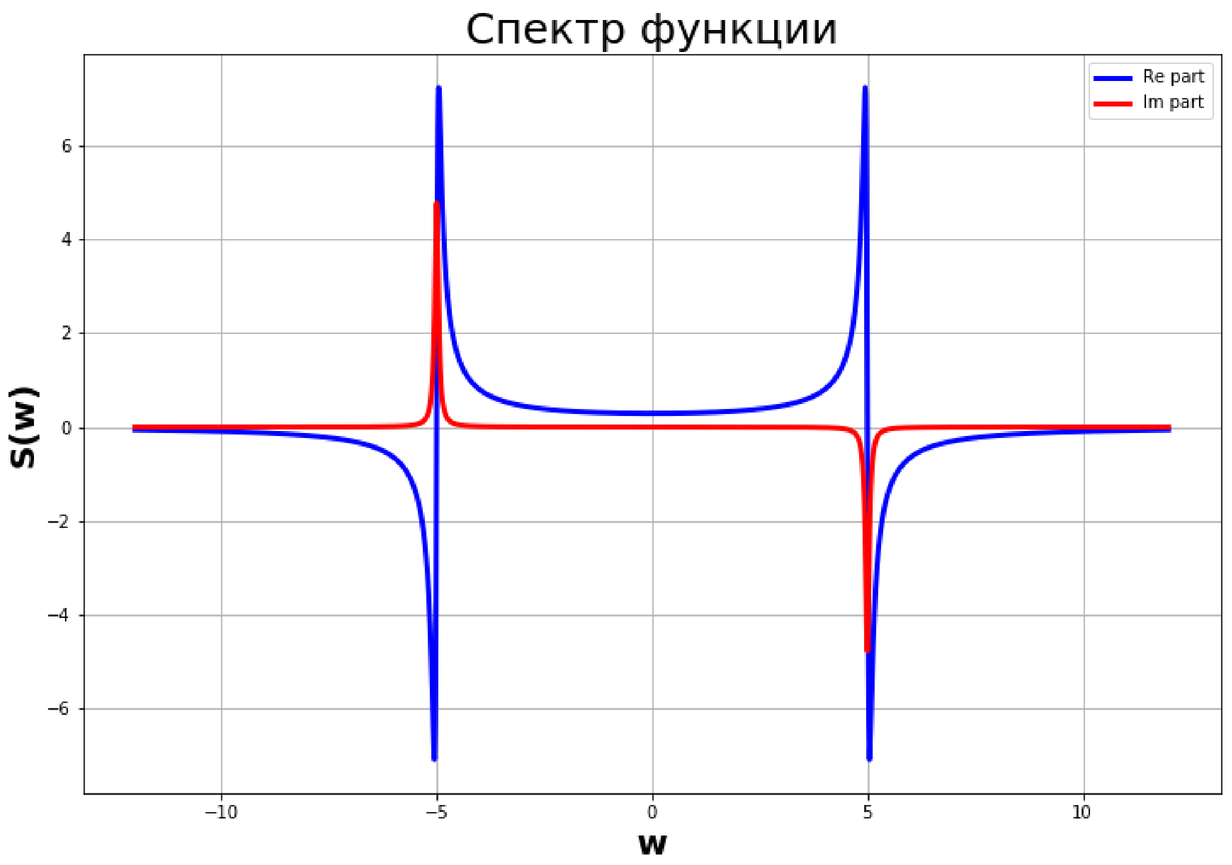


Спектр функции
Im part a=3, W=5, tau=2
Im part a=3, W=2, tau=5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
S(w)
−10
−5
0
5
10
w

ГРАФИКИ: $\Omega\tau = 100$

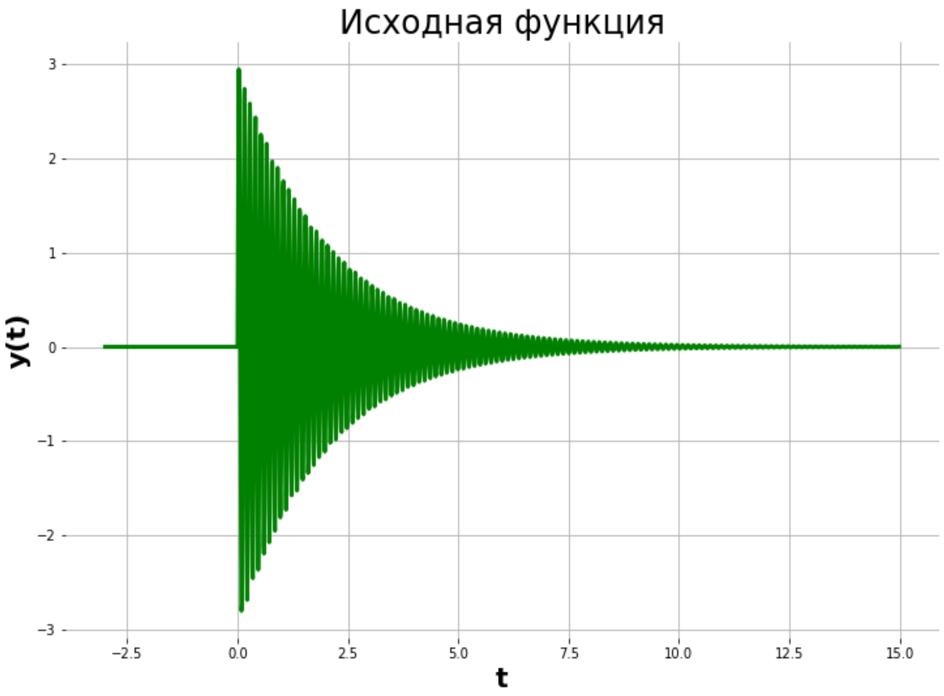
$a = 3$ $\Omega = 5$ $\tau = 20$

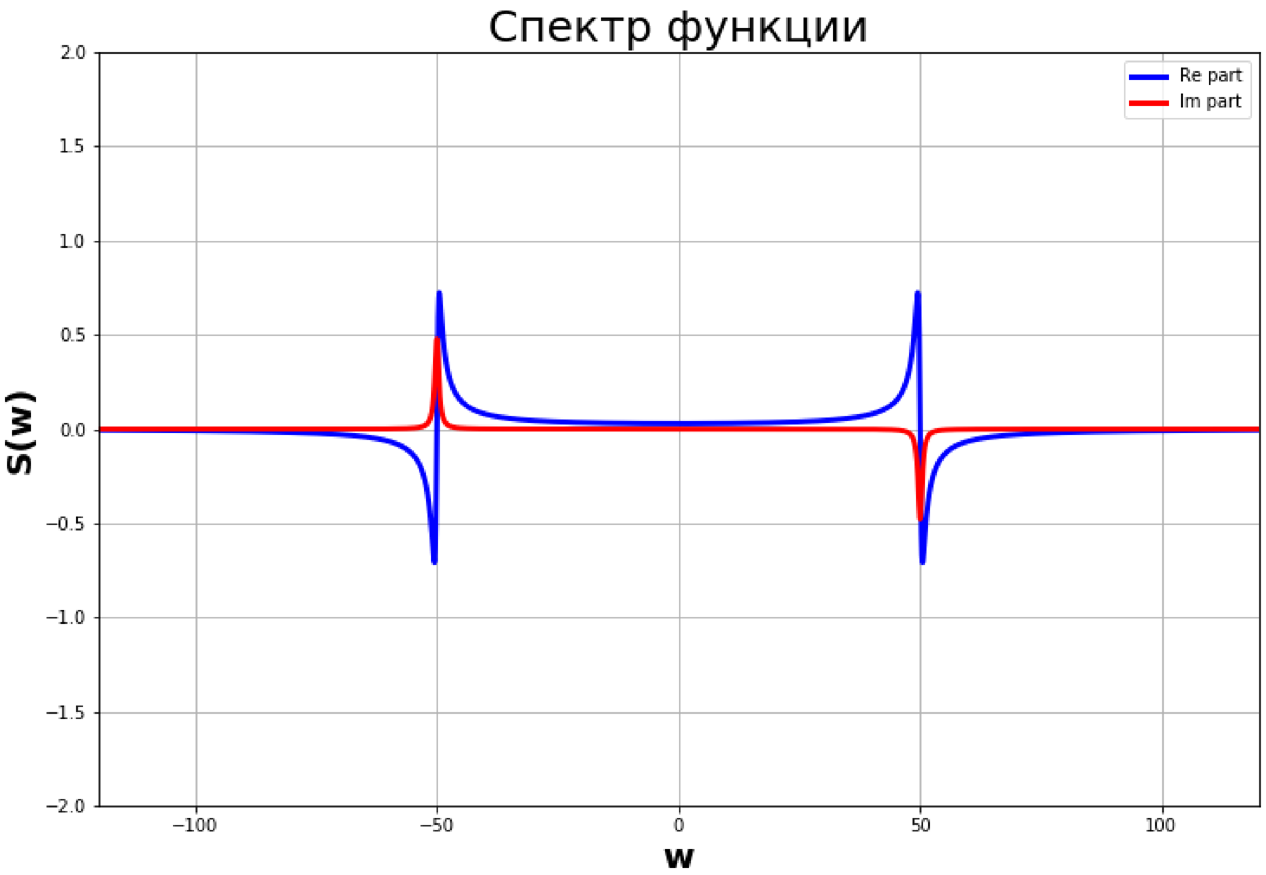




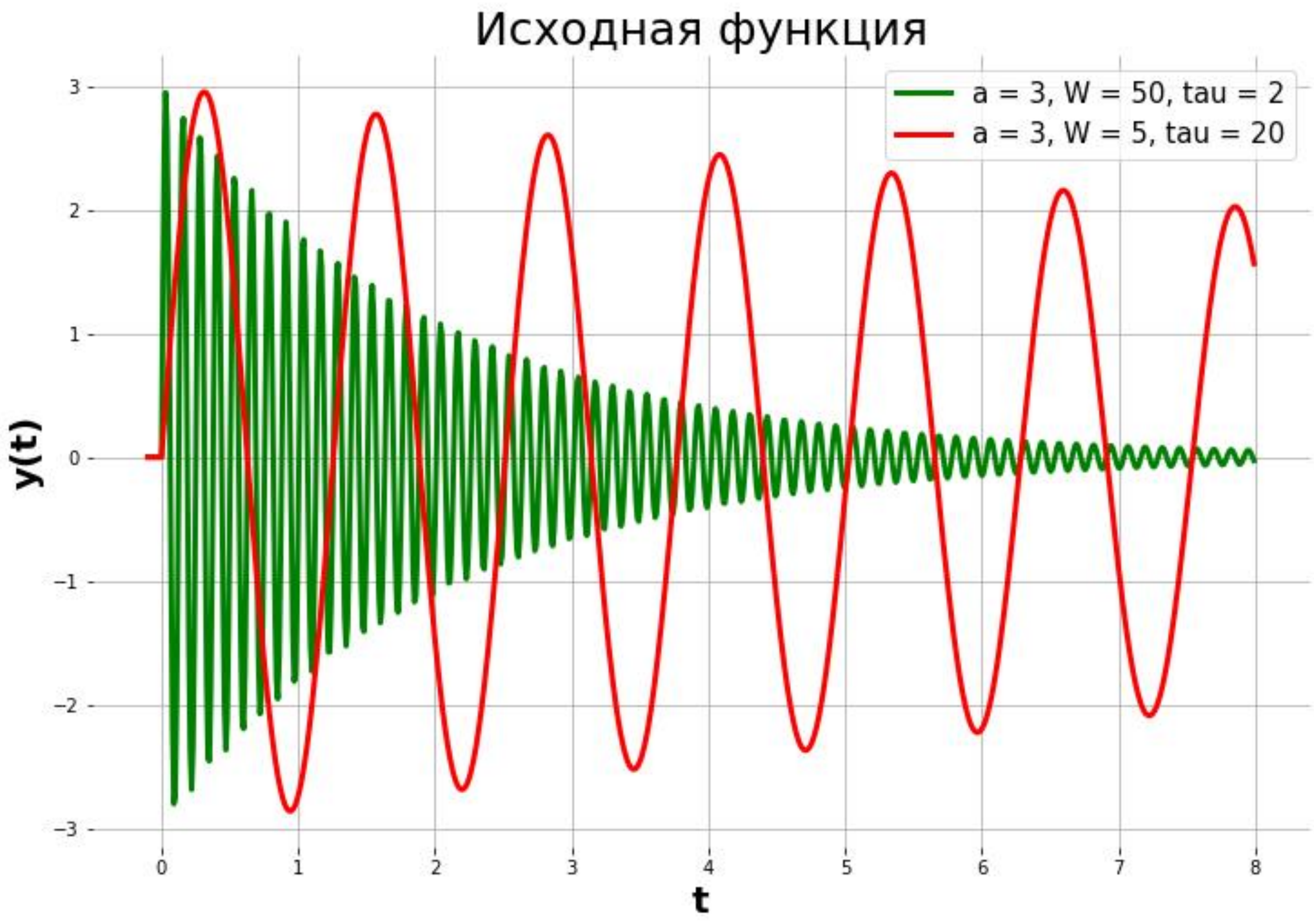
ГРАФИКИ: $\Omega\tau = 100$

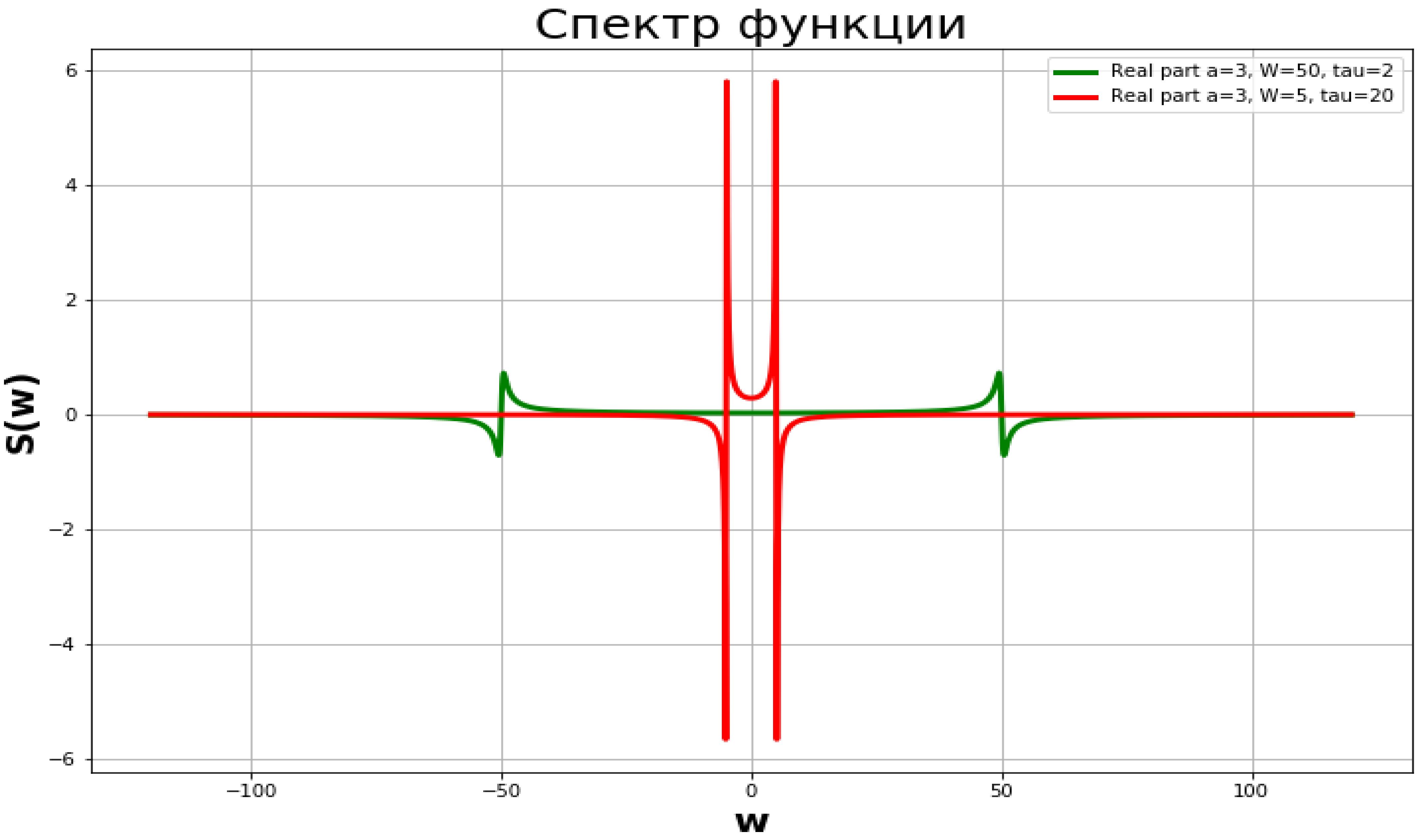
$a = 3 \quad \Omega = 50 \quad \tau = 2$



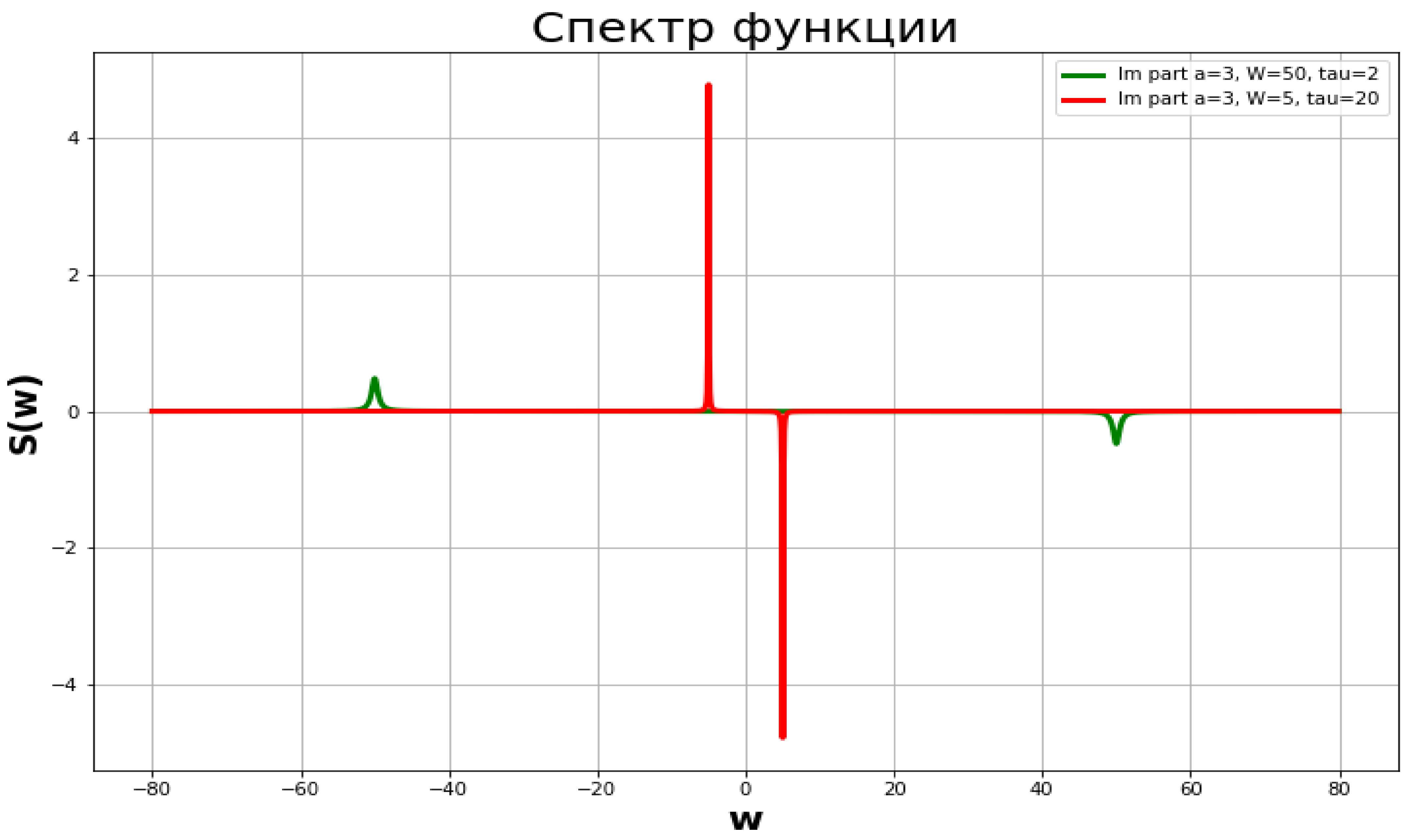


СРАВНИМ


Исходная функция
a = 3, W = 50, tau = 2
a = 3, W = 5, tau = 20
y(t)
t
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
1
2
3
4
5
6
7
8



Спектр функции
Real part a=3, W=50, tau=2
Real part a=3, W=5, tau=20
6
4
2
0
−2
−4
−6
S(w)
−100
−50
0
50
100
w

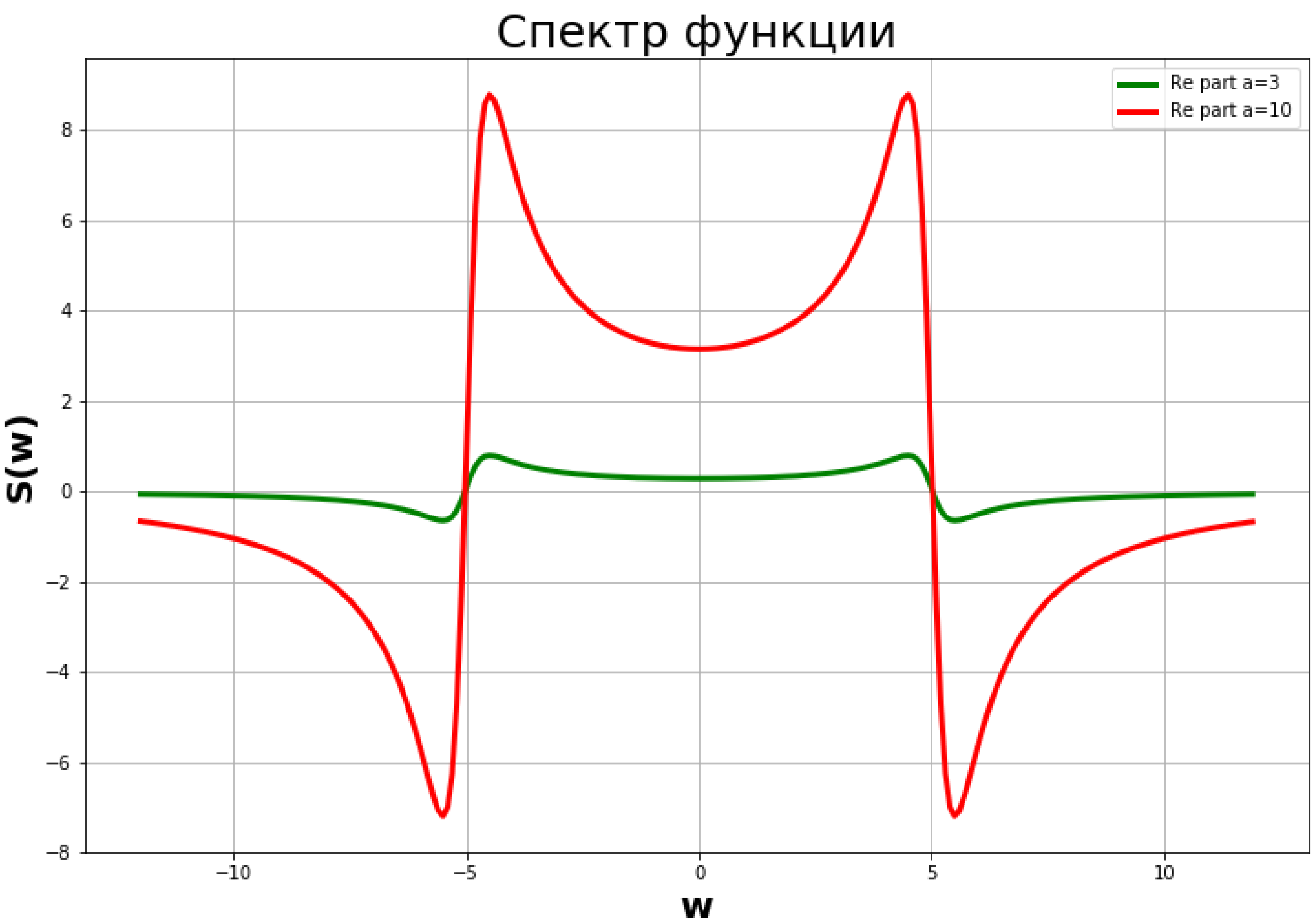


Спектр функции
Im part a=3, W=50, tau=2
Im part a=3, W=5, tau=20
S(w)
w
4
2
0
−2
−4
−80
−60
−40
−20
0
20
40
60
80

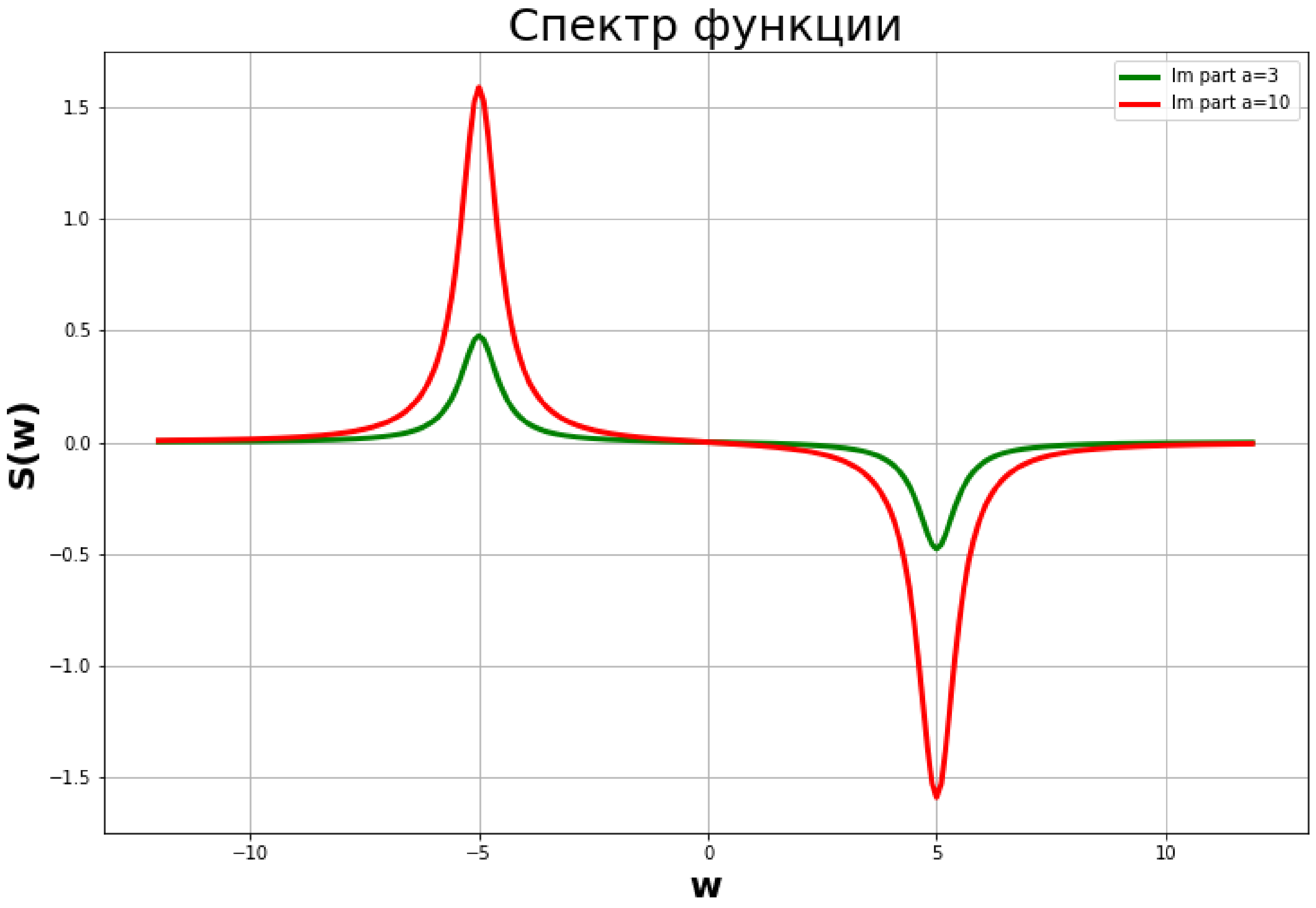
ЕСЛИ УВЕЛИЧИТЬ a

$\Omega = 5 \qquad \tau = 2$

ЕСЛИ УВЕЛИЧИТЬ a



ЕСЛИ УВЕЛИЧИТЬ a



УШИРЕНИЕ

Время жизни атома $\tau = 10^{-8}$ с. Из теоремы о ширине спектра:

$$\Delta\omega \ * \ \tau \geq 2\pi \, , \quad \text{следовательно} \quad \Delta\omega \geq \ 10^{8} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$$

Доплеровский эффект создает радиационное уширение спектра:

$\Delta\omega = \ \omega \frac{v}{\text{c}} \cos\theta \, ,$ $\quad \cos\theta \in [-1; 1]$. Тогда уширение $\Delta\omega = 2\omega \frac{v_{\text{ср}}}{\text{c}} = 2\omega\sqrt{\frac{8kT}{\pi m c^2}}$, где $v_{\text{ср}}$ - средняя скорость молекул. Точный вывод на основе распределения Максвелла приводит к формуле для полуширины линии

$$\delta\omega = 2\omega\sqrt{\frac{2kTln\ 2}{mc^2}}$$

При температуре T = 400K полуширина линии излучения равна $\delta\omega = \ 9{,}42 \ * \ 10^{9} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$